

I – ÁLGEBRA DE VECTORES (\mathbb{R}^3)

- Usar un sistema de mano derecha (dextrógiro) para ubicar los puntos $A(1,2,1)$, $B(2, -3,1)$ y $C(-2,3, -1)$. Encuentre las distancias AB , AC y BC .
- Sea $V_3 = \{\langle x, y, z \rangle | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de todos los vectores posición tridimensionales; calcule la magnitud de $a \in V_3$ si:
 - $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$
 - $a = \langle 1, 2, 2\sqrt{5} \rangle$
- Dados los vectores $a, b \in V_3$, calcule $a + b$, $a - 2b$, $\|3a + 2b\|$ y los vectores unitarios correspondientes a “ a ” y a “ b ” para cada inciso.
 - $a = \langle 2, 1, -2 \rangle$ y $b = \langle 1, 3, 0 \rangle$
 - $a = 3i - j + 4k$ y $b = 5i + j$
 - $a = \langle 5, -1, 2 \rangle$ y $b = \langle -1, 1, 2 \rangle$
 - $a = i - 4j - 2k$ y $b = i - 3j + 4k$
- Identifique la forma geométrica dada por la ecuación:
 - $x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 4$
 - $z = -3$
- Dados los vectores $a, b \in V_3$, halle dos vectores unitarios ortogonales a ambos. Compruebe.
 - $a = \langle 1, 0, 4 \rangle$ y $b = \langle 1, -4, 2 \rangle$
 - $a = \langle 2, -2, 1 \rangle$ y $b = \langle 0, 0, -2 \rangle$
 - $a = \langle 2, -1, 0 \rangle$ y $b = \langle 1, 0, 3 \rangle$
 - $a = \langle 0, 2, 1 \rangle$ y $b = \langle 1, 0, -1 \rangle$
 - $a = 3i - j$ y $b = 4j + k$
 - $a = -2i + 3j - 3k$ y $b = 2i - k$
- Use el producto cruz para determinar el ángulo entre los vectores $a, b \in V_3$.
 - $a = \langle 1, 0, 4 \rangle$ y $b = \langle 2, 0, 1 \rangle$
 - $a = \langle 2, 2, 1 \rangle$ y $b = \langle 0, 0, 2 \rangle$
 - $a = 3i + k$ y $b = 4j + k$
 - $a = i + 3j + 3k$ y $b = 2i + j$

II – RECTAS Y PLANOS

1. Para cada uno de los incisos halle las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta.

a) Pasa por $A(3, -2, 4)$ y es paralela al vector $\langle 3, 2, -1 \rangle$.

b) Pasa por $B(0, 2, 1)$ y $C(2, 0, 2)$.

c) Pasa por $D(1, 4, 1)$ y es paralela a la recta $x = 2 - 3t$, $y = 4$, $z = 6 + t$.

d) Pasa por $E(2, 0, 1)$ y es perpendicular a los vectores $\langle 1, 0, 2 \rangle$ y $\langle 0, 2, 1 \rangle$.

2. Establezca si las rectas son paralelas o perpendiculares o halle el ángulo entre ellas.

a) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = -6 + t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 - 2s \\ z = -6 + s \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 4 + s \\ y = -2s \\ z = -1 + 3s \end{cases}$

3. Halle la ecuación del plano dado.

a) Plano que contiene al punto $A(1, 3, 2)$ con vector normal $\langle 2, -1, 5 \rangle$.

b) Plano que contiene los puntos $B(1, -2, 1)$, $C(2, -1, 0)$ y $D(3, -2, 2)$.

c) Plano que contiene a $E(3, -2, 1)$ y es paralelo al plano $x + 3y - 4z = 2$.

4. Halle la intersección entre los planos dados (si existe) y dibuje uno de ellos.

a) $2x - y - z = 4$ y $3x - 2y + z = 0$

b) $3x + y - z = 2$ y $2x - 3y + z = -1$

5. Halle la distancia entre los objetos dados.

a) El punto $A(1, 3, 0)$ y el plano $3x + y - 5z = 2$.

b) Los planos $2x - y - z = 1$ y $2x - y - z = 4$.

III – CILINDROS Y SUPERFICIES

1. Dibuje las trazas apropiadas y luego bosqueje e identifique la superficie.

a) $z = x^2$

b) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

c) $z = 4x^2 + 4y^2$

d) $x^2 - \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$

e) $z = \cos y$

f) $z = 4 - x^2 - y^2$

g) $x + y = 1$

h) $x^2 + y^2 = 4$

i) $9x^2 + z^2 = 9$

j) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

k) $x^2 + z^2 = y$

l) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 16$

2. Parametriza las siguientes superficies de revolución

a. La superficie generada al girar la parábola $y = 4x^2$ en el plano xy alrededor del eje y .

b. La superficie generada al girar la gráfica de $y = 2z - 4$ en el plano yz alrededor del eje z

c. La superficie generada al girar la gráfica de $(y - 4)^2 + z^2 = 4$ en el plano yz alrededor del eje z

3. Dibuje las trazas dadas en un único sistema coordenado tridimensional.

a) $z = x^2 + y^2; x = 0, x = 1, x = 2$

b) $z = x^2 + y^2; y = 0, y = 1, y = 2$

c) $z = x^2 - y^2; x = 0, x = 1, x = 2$

d) $z = x^2 - y^2; y = 0, y = 1, y = 2$

IV – CURVAS PARAMÉTRICAS PLANAS Y LONGITUD DE ARCO EN \mathbb{R}^3

1. Represente los valores de la función con valores vectoriales.

a) $r(t) = \langle 3t, t^2, 2t - 1 \rangle, t = 0, t = 1, t = 2$

b) $r(t) = (4 - t)i + (1 - t^2)j + (t^3 - 1)k, t = -2, t = 0, t = 2$

c) $r(t) = \langle \cos 3t, 2, \sin 2t - 1 \rangle, t = -\frac{\pi}{2}, t = 0, t = \frac{\pi}{2}$

2. Dibuje la curva trazada por la función con valores vectoriales dada.

a) $r(t) = \langle 2 \cos t, \sin t - 1 \rangle$

b) $r(t) = \langle 2 \cos 3t + \sin 5t, 2 \sin 3t + \cos 5t \rangle$

c) $r(t) = \langle t, t^2 + 1, -1 \rangle$

d) $r(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, 3 \rangle$

e) $r(t) = \langle t \cos t, 2t, t \sin t \rangle$

f) $r(t) = \langle 3 \cos t, 3 \sin t, t \rangle$

g) $r(t) = \langle t + 2, 2t - 1, t + 2 \rangle$

h) $r(t) = \langle t, 1, 3t^2 \rangle$

3. Dibuje la curva y halle la longitud de arco.

a) $r(t) = \langle \cos t, \sin t, \cos 2t \rangle; 0 \leq t \leq 2\pi$

b) $r(t) = \langle \cos t, \sin t, \sin t + \cos t \rangle; 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $r(t) = \langle t, t^2 - 1, t^3 \rangle; 0 \leq t \leq 2$

d) $r(t) = \langle t^2 + 1, 2t, t^2 - 1 \rangle; 0 \leq t \leq 2$

V – COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

1. Escriba en coordenadas cilíndricas la ecuación dada.

a) $x^2 + y^2 = 16$

b) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $y = 2x$

e) $z = \sin(x^2 + y^2)$

f) $z = e^{-x^2 - y^2}$

2. Dibuje las gráficas de las ecuaciones cilíndricas.

a) $z = r$

b) $r = 2 \sec \theta$

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

d) $z = \sqrt{4 - r^2}$

e) $r = 4$

f) $r = 6 \sin \theta$

g) $\theta = \frac{\pi}{3}$

h) $r = 2 \cos \theta$

3. Convierta el punto esférico (ρ, φ, θ) en coordenadas rectangulares.

a) $(4, 0, \pi)$

b) $(4, \frac{\pi}{2}, \pi)$

c) $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

4. Exprese la ecuación en coordenadas esféricas.

a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

b) $y = x$

c) $z - 1 = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

d) $z = 0$

e) $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$

f) $z = 2$

5. Dibuje la gráfica de la ecuación esférica.

a) $\rho = 2$

b) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$

c) $\theta = \frac{\pi}{4}$

d) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

e) $\rho = 4$

f) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

VI – FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. Describa y dibuje el dominio de la función.

a) $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

b) $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

c) $h(x, y) = \ln(2 + x + y)$

2. Calcule los valores de la función en los puntos indicados.

a) $f(x, y) = x^2 + y$; $f(2,1)$, $f(0,3)$

b) $g(x, y) = x + 3x^2y$; $g(2,0)$, $g(1,3)$

c) $h(x, y) = \frac{3x}{x^2 - y^2}$; $h(2,1)$, $h(3,0)$

d) $w(x, y) = \sqrt{x + y^2}$; $w(3,1)$, $w(4,0)$

3. Dibuje las trazas indicadas y haga la gráfica de $z = f(x, y)$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$; $z = 1$, $z = 4$, $z = 9$, $x = 0$

b) $f(x, y) = x^2 - y^2$; $z = 0$, $z = 1$, $y = 0$, $y = 2$

4. Dibuje una representación de contorno.

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

b) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

c) $f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$

VII – LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcule el límite indicado.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{x^2 y}{4x^2 - y}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,1)} \frac{\cos xy}{y^2 + 1}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-3,0)} \frac{e^{xy}}{x^2 + y^2}$

2. Muestre que el límite indicado no existe.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2}{x^2 + y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin x}{x^2 + y^2}$

d) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}$

3. Demuestre que el límite indicado existe.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 \sin y}{2x^2 + y^2}$

4. Determine todos los puntos en los cuáles la función dada es continua.

a) $f(x, y) = 4xy + \sin(3x^2 y)$

b) $g(x, y) = e^{3x-4y} + x^2 - y$

c) $h(x, y) = \ln(3 - x^2 + y)$

d) $w(x, y) = \tan(x + y)$

e) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$

5. Use coordenadas polares para hallar el límite indicado, si existe. Note que

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ es equivalente a $r \rightarrow 0$.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

VIII – DERIVADAS PARCIALES, DIFERENCIABILIDAD Y DIFERENCIAL TOTAL

1. Halle las derivadas parciales de primer orden de la función dada por definición.

Calcule el valor en el punto indicado.

a) $f(x, y) = x^2y - 4xy^2$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

b) $g(x, y) = 2x^3 + xy$; $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(2,1)$

2. Halle las derivadas parciales que se indican.

a) $f(x, y) = x^3 - 4xy^2 + 3y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

b) $g(x, y) = x^4 - 3xe^{4y} + 2 \cos y$; $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$

c) $h(x, y, z) = \ln(xyz^2)$; h_{xx} , h_{yyz} , h_{xxyz}

3. Halle todos los puntos donde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ e interprete gráficamente el significado de los puntos.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

4. Determine si la función es diferenciable o no.

a) $g(x, y) = 3xy + y^2$

b) $h(x, y) = x^2y$

5. Halle el diferencial total de la función dada.

a) $w(x, y) = \sin x + ye^x$

b) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

IX – REGLA DE LA CADENA, DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTES

- Use la regla de la cadena para hallar la derivada de $g'(t)$.
 - $g(t) = f(x(t), y(t)); f(x, y) = x^2y - \sin y, x(t) = \sqrt{t^2 + 1}, y(t) = e^t$
 - $g(t) = f(x(t), y(t)); f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, x(t) = \sin t, y(t) = t^2 + 2$
- Establezca la regla de la cadena para la función compuesta general.
 - $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$
 - $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
- Use diferenciación implícita para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.
 - $3xz - z^3 + yz = 0$
 - $xyz - 2y^2z^2 + \cos xy = 0$
- Halle el gradiente de la función dada en el punto indicado.
 - $f(x, y) = \sin(3xy) + y^2; A(\pi, 1)$
 - $f(x, y) = x^2\sqrt{y^2 + 1}; B(2, 0)$
 - $f(x, y, z) = z^2e^{2x-y} - 4xz^2; C(1, 2, 2)$
- Calcule las derivadas direccionales de la función en el punto dado, en la dirección del vector indicado.
 - $g(x, y) = x^2y + 4y^2; A(2, 1), u = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$
 - $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; B(3, -4), u$ en la dirección de $\langle 3, -2 \rangle$
 - $f(x, y) = \cos(2x - y); C(\pi, 0), u$ en la dirección desde $D(\pi, 0)$ hasta $E(2\pi, \pi)$.
- Halle las direcciones de cambio máximo y mínimo de la función en el punto dado, y los valores de máxima y mínima razón de cambio.
 - $f(x, y) = x \cos 3y; A(-2, \pi)$
 - $g(x, y) = y^2e^{4x}; B(0, -2)$

X – PLANOS TANGENTES Y RECTAS NORMALES A LAS SUPERFICIES

1. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.
 - a) $z = x^2 + y^2 - 1; A(2,1,4)$
 - b) $z = e^{-x^2-y^2}; B(1,1, e^{-2})$
 - c) $z = \sin x \cos y; C(\frac{\pi}{2}, \pi, -1)$
 - d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}; D(8, -6,10)$
 - e) $z = 6 - x^2 - y^2; E(1,2,1)$
 - f) $z = x^3 + y^3 + \frac{x^2}{y}; F(2,1,13)$
 - g) $z = \frac{4x}{y}; G(-1,4, -1)$
 - h) $z = x^3 - 2xy; H(1, -1,3)$
2. Para cada uno de los incisos del ejercicio anterior encuentre una recta normal al plano, que pase por el origen, es decir: $O(0,0,0)$.

XI – EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1. Halle todos los puntos críticos e intente clasificarlos si es posible.

a) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$

b) $g(x, y) = xy^2 - x^2 - y$

c) $h(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$

d) $w(x, y) = y^3 + 4y^2 - 2xy + x^2$

e) $v(x, y) = x \sin y$

f) $u(x, y) = 6xy^2 - 2x^3y + y^2$

2. Halle todos los puntos críticos y analice gráficamente cada punto (use la tecnología si es preciso), clasificando cada punto.

a) $f(x, y) = x^2 - \frac{4xy}{y^2+1}$

b) $g(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

c) $h(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$

XII – REGLA DE L'HOPITAL E INTEGRALES IMPROPIAS

1. Halle los límites indicados.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

2. Determine si la integral es impropia o no.

a) $\int_0^2 x^{-2/5} dx$

b) $\int_{-2}^2 \frac{5}{x} dx$

c) $\int_0^{\infty} x^{2/5} dx$

d) $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x} dx$

e) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$

f) $\int_2^{\infty} \frac{7}{x} dx$

3. Determine si la integral converge o diverge. En caso de que converja, halle el valor de la integral.

a) $\int_0^1 x^{-1/3} dx$

b) $\int_1^{\infty} x^{-4/5} dx$

c) $\int_5^{10} \frac{2}{\sqrt{x-5}} dx$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{3x} dx$

e) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-2)^2} dx$

f) $\int_0^{\infty} \cos x e^{-\sin x} dx$