I – ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

1. Verificar si los puntos sobre la recta $y = 3x - 2$ en $\mathbb{R}^2$, forman un grupo Abeliano. Esto es $B = \{(x,y) | y = 3x - 2, x \in \mathbb{R}\}$ con la suma en $\mathbb{R}^2$.
2. Sea $(G,*)$ un grupo Abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G. Se define el conjunto: $H * K = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$

Probar que $H * K$ es un subgrupo del grupo $(G,*)$.

3. En $\mathbb{Z}$ consideramos las dos operaciones binarias definidas por:

   $a \bullet b = a + b - 8$ y $a * b = a + b - ab$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa? Justificar, explicando por qué.

   a) $\bullet$ es asociativa en $\mathbb{Z}$.
   b) $(\mathbb{Z}, \bullet)$ posee elemento neutro.
   c) Cada elemento de $\mathbb{Z}$ tiene elemento inverso con la Ley $\bullet$.
   d) $*$ es distributiva respecto de $\bullet$.
   e) $*$ es conmutativa en $\mathbb{Z}$.
4. Pruebe si los $\mathbb{Z}$ bajo la multiplicación habitual es o no un grupo. Justifique su respuesta.
5. Determinar si los siguientes conjuntos son grupos, bajo la suma usual de polinomios.

   $E = \{P(x): P(x) = ax^2 + bx + 1;\ a, b, \in \mathbb{R}\}$

   $F = \{P(x): P(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$
6. En un anillo no conmutativo $(\mathrm{A}, +, *)$ se define una operación $*$ como: $x * y = x * y - y * x$. Calcular $x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y)$.
7. Verificar si $(\mathbb{Z}_3, +, °)$ forman un campo. Elaborar la tabla.
8. Verificar si $(\mathbb{Z}_4, +, °)$ forman un campo. Elaborar la tabla.

II – ESPACIOS VECTORIALES (i)

1. Determine y demuestre si el conjunto V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; en caso de no serlo indique qué axioma no cumple
   a. $V = \mathbb{R}^3$ con la suma y producto por escalar usual
   b. $V = P_{\leq 4}$ con la suma y producto por escalar usual de polinomios
   c. $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ con la suma usual de matrices y producto por escalar usual
2. Determine y demuestre si el subconjunto H del espacio vectorial V es un subespacio de V, sobre $\mathbb{R}$, en caso de no serlo indique qué axioma no cumple.
   a. $V = \mathbb{R}^3,\ H = H_1 \cap H_2,\ con\ H_1 = \{(x;\ y;\ z): x + 3y - 2z = 0\}$, $H_2 = \{(x;\ y;\ z): x - y + 3z = 0\}$.
   b. $V = M_{nn}\ ; H = \{S \in M_{nn}: S\ es\ simétrica\}$
   c. $V = P_{\leq 4}\ ; H = \{p \in P_4: grado\ p = 4\}$
   d. $V = P_{\leq n}\ ; H = \{p \in P_n: p(0) = 1\}$
3. Hallar las dimensión de $H_1 \cap H_2$, y $H_1 \cup H_2$, en caso de que sean subespacios vectoriales, en caso de no serlo justificar la razón.
4. Determine si el conjunto de vectores dado forma una base, y describa al que espacio generan.
   a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix},$
   b) En P_3: $2x,\ x^3 - 3, 1 + x - 4x^3, x^3 + 18x - 9.$
   c) En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   d) Determine una base del espacio solución del sistema:

$$x - y - z = 0$$
$$2x - y + z = 0$$

III – ESPACIOS VECTORIALES (ii)

1. Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y suponga que:

   $a_1 = 4b_1 - b_2, a_2 = -b_1 + b_2, \;\; a_3 = b_2 - 2b_3.$

   a) Encontrar la matriz de cambio de base de $B \; a \; A$, y de a $A \; a \; B$.

   b) Encuentre las coordenadas de x referidas a la base B, donde:

      $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$

      (**Note que**: $[x]_A \; = \; (3, 4, 1)$)

2. Encontrar $a, b \; \in \mathbb{Q}$ tales que el subconjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ a-b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{Q}^3$, sea linealmente dependiente.

3. Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Encuentre una base para el subespacio W generado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

4. Encuentre una base para D_3, el espacio vectorial de matrices diagonales de $3x3$. ¿Cuál es la dimensión de D_3? (Una matriz diagonal tiene ceros en todas partes, menos en la diagonal). El conjunto de matrices diagonales $3x3$ es un subespacio de las matrices $3x3$, con la suma de matrices y multiplicación por un escalar.

5. Encuentre el rango y la nulidad de la matriz dada. Espacio de renglones y espacio de columnas para cada matriz según corresponda.

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$

   b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

IV – ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO (i)

1. Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^4$ que incluya los vectores dados, añadiendo los vectores linealmente independientes que faltan para completar, y luego, ortonormalizar usando el producto euclideano. ¿Se puede formar una matriz ortogonal? Si es posible, formarla.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ que incluya el vector dado, añadiendo los vectores linealmente independientes que faltan para completar, y luego, ortonormalizar usando el producto euclideano. ¿Se puede formar una matriz ortogonal? Si es posible, formarla.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Demostrar que la función definida por $< f\ g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ es un producto interno.

4. Encuentre una base ortonormal para el espacio vectorial dado.

   a) $\mathbb{R}^2$, tomando la base $B = \left\{\binom{2}{3}, \binom{-1}{4}\right\}$

   b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$ (plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$)
   Nota: Obtener la base del plano.

   c) $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = z\ , y = w\}$

   d) $G = \{(1,0,-2), (2,1,-1), (-1,3,1)\}$

V – ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO (ii)

1. Calcular la norma de los siguientes vectores, según la norma indicada.
   a) $(2, 4, -5)$ (Norma Euclidiana: $\forall\ v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + \ {x_n}^2}$)
   b) $(1, -3, 4, -8)$ (Norma Valor Absoluto: $\forall\ v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$)
   c) $(2, 6, -1, 0)$ (Norma Infinita: $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_\infty = max_i\{|x_i|\}$)
2. Sea V el espacio de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Sobre $\mathbb{R}$, ¿ $W = \{ax^2 + bx - 2a - b\ /a, b\ \in\ \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V?
3. Definamos el producto entre dos polinomios como:

   $< p\ q > = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$

   a) Obtener una base ortonormal de W.
   b) Obtener la proyección sobre W de los polinomios:

   $P(x)\ =\ x^2 - x + 1$ y $Q(x)\ =\ 3x - 2$.

VI – TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Demuestre que las siguientes transformaciones son lineales.
   a) Sea M_{2x2} el espacio vectorial de todas las matrices de $2x2$, defina:
   $T: M_{2x2} \to M_{2x2}$ como $T(A) = A + A^T,\ donde\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
   b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ x+2y \end{bmatrix}$.
   c) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x + 1$.
   d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + z, y - z)$.
   e) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; T(x, y) = (x - 2y,\ x + y, \mathrm{x}^2)$.
2. Encuentre la representación matricial de la transformación lineal dada y encuentre su núcleo, imagen, nulidad y rango. Decir si la transformación lineal es un isomorfismo; en caso de serlo hallar su inversa.
   a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y \\ 2x+y \end{pmatrix}$
   b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y+2z \\ x-y+z \end{pmatrix}$
   c) $T: P_2 \to P_1;\ T(a + bx + cx^2) = a + bx$
3. Obtener la matriz asociada a la transformación lineal, dadas las bases y un vector, verificar que $(T\ (v))_{B_2} = A_T(v)_{B_1}$.
   a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; T(x, y) = (x - y, 2x + y, 5x)\ ; B_1 = \{(1, -1), (0, -2)\}$;
   $B_2 = \{(1, -4, 3), (5\ 2, -2), (4, -7, 0)\}; v = (1, 2)$.
   b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; T(x, y, z) = (x - y + z, x + y - z); v = (0, 1, 2)$;
   $B_1 = \{(1, 0, 3), (2, 1, 8), (1, -1,2)\}; B_2 = \{(2, -9), (1, 8)\}$.
4. Escribir la matriz dada como el producto de matrices elementales e indicar geométricamente que es lo que hacen.
   a) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

VII – EIGENVALORES Y EIGENVECTORES. APLICACIONES.

1. Determinar si cada una de las siguientes matrices es diagonalizable y en caso afirmativo obtener P talque $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonalizable.

   a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Eleve la matriz a la potencia indicada utilizando su diagonalización:

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, A^4
   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, A^5

3. Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^tAQ = D$, una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de A.

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
   c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. la ecuación cuadrática en la forma $Av.v = d$. Eliminar el termino xy, encontrando el ángulo de rotación θ de los ejes. Escribir la nueva ecuación en términos de los nuevos ejes, identificar la cónica y graficar.

   a) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6 = 0$
   b) $-x^2 + 2xy - y^2 = 0$
   c) $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$